Faculté Polydisciplinaire
Khouribga

A. U. 2016-2017
Filière: SMA/SMI
Responsable: N.MRHARDY

Analyse I
Durée: 2h

- Les documents et téléphones portables sont formellement interdits.
- Les calculatrices sont à usage personnel.

Questions de cours.

(1) Ecrire l'énoncé du **théorème** des accroissements finis généralisé.
(2) En utilisant le théorème de Rolle, donner une preuve du théorème des accroissements finis généralisé.
(3) **Application:** Calculer

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

Exercice 1.

Soit A l'ensemble définie par

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2,\ x = p + q\sqrt{2}\right\}$$

(1) On considère la suite $(x_n)_n$ de terme général $x_n = (-1+\sqrt{2})^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(x_n) \in A$.
(2) En déduire que $\inf A = 0$.

Exercice 2.

Considérons la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\arctan x + \frac{1}{2}$$

(1) En utilisant le théorème des valeusr intermédiaires, montrer que la fonction f admet un point fixe α sur l'intervalle $[0,1]$.
(2) Etudier la dérivabilité de f puis montrer que sa dérivée est bornée.
(3) En déduire que f est contractante c.à.d

$$\exists k \in]0,1[,\ \forall (x,y)\mathbb{R}^2 \quad |f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$$

(4) On considère maintenant la suite $(x_n)_n$ définie par $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = f(x_n)$
  (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_{n+1}-\alpha| \leq k|x_n - \alpha|$
  (b) En déduire que la suite $(x_n)_n$ converge vers α.

T.S.V

2

Problème.

Le but de cet exercice est d'étudier la fonction sécante hyperbolique et sa fonction réciproque

(1) On appelle sécante hyperbolique la fonction définie par

$$sch(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$$

  (a) Déterminez l'ensemble de définition D de la fonction sch et étudiez sa parité.
  (b) Etudiez la dérivabilité de la fonction sch et exprimez sa dérivée en fonction de tanh.
  (c) Dressez le tableau de variations de la fonction sch en précisant ses limites sur les bornes de D .
  (d) Montrez que la restriction de sch à l'intervalle $[0,+\infty[$ induit une bijection sur un intervalle J à préciser.

(2) On note $Argsch$ la bijection réciproque de sch.
  (a) Donnez les ensembles de définition et de continuité de $Argsch$ ainsi que ses variations.
  (b) Sur quel ensemble la fonction $Argsch$ est-elle dérivable ? Montrez que sa dérivée sur cet ensemble est donnée par:

$$(Argsch(x))' = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

Indication: Vous pouvez commencer par montrer que:

$$\tanh(x) = \sqrt{1-sch^2(x)}, \quad \forall x \in [0,+\infty[$$

  (c) Montrez que pour tout

$$x \in]0,1], \qquad Argsch(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

  (d) La fonction $Argsch$ est-elle prolongeable par continuité en 0? Si oui donnez son prolongement.

(3) Etudiez la convexité de la fonction sch sur le domaine D.